Normalité projective des varétés magnifiques de rang 1

Alexis Tchoudjem

Normalité projective des varétés magnifiques de rang 1
(Projective normality of rank one wonderful varieties)

Alexis TCHOUDJEM

Institut Camille Jordan

Université Claude Bernard Lyon I

Boulevard du Onze Novembre 1918

69622 Villeurbanne

FRANCE

tchoudjem@math.univ-lyon1.fr

Villeurbanne, le 25 mai 2011

Résumé : Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ deux faisceaux inversibles sur une variété projective X. On suppose que $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ sont engendrés par leurs espaces de sections globales $\Gamma(\mathscr{L})$ et $\Gamma(\mathscr{L}')$. On démontre dans cet article que le morphisme :

$$\Gamma(\mathscr{L}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}') \to \Gamma(\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')$$

est surjectif, dans le cas où X est une variété magnifique de rang 1. En particulier, le cône au-dessus d'une variété magnifique X de rang 1 défini par un faisceau inversible très ample est toujours normal.

Abstract : Let $\mathscr{L}$ and $\mathscr{L}'$ be two invertible sheaves over a projective variety X. We suppose that $\mathscr{L}$ and $\mathscr{L}'$ are generated by their global section spaces $\Gamma(\mathscr{L})$ and $\Gamma(\mathscr{L}')$. We prove in this article that the morphism :

$$\Gamma(\mathscr{L}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}') \to \Gamma(\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')$$

is surjective, in the case where X is a rank one wonderful variety. In particular, the cone over a rank one wonderful variety defined by a very ample invertible sheaf is always normal.

Introduction

D'après [5], si X est une variété projective obtenue comme la compactification magnifique d'un espace symétrique G/H (où G est un groupe semi-simple adjoint et H le sous-groupe des points fixes d'une involution θ de G), alors pour tous faisceaux inversibles et engendrés par leurs sections globales, le morphisme :

$$R \ : \ \Gamma(\mathscr{L}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}') \to \Gamma(\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}') \tag{1}$$

induit par la restriction de $X \times X$ à sa diagonale Δ_X est surjectif (on note $\Gamma(-)$ ou $\Gamma(X, -)$ l'espace des sections globales d'un faisceau), *cf.* aussi [8], pour les compactifications magnifiques des groupes semi-simples adjoints.

Les variétés magnifiques (définies par exemple dans [9]) sont une généralisation des compactifications magnifiques des espaces symétriques. Les variétés magnifiques les plus simples, après celles de rang 0 qui sont les variétés de drapeaux (généralisées), sont les variétés magnifiques de rang 1. Nous démontrons ici (*cf.* le théorème 4.1) que le morphisme R de (1) est encore surjectif si X est une variété magnifique de rang 1.

La normalité du cône au-dessus de X défini par un faisceau inversible très ample sur X s'ensuit par un argument standard (*cf.* [6, II Ex.5.14 d)]).

Avant de démontrer le résultat principal, nous rappelons dans la section 1, la définition des variétés magnifiques de rang 1 et la notion d'induction parabolique. Pour une variété magnifique de rang 1 donnée, nous aurons besoin d'une description des faisceaux inversibles sur X et de l'espace de leurs sections globales (*cf.* la section 2) ainsi que de la grosse cellule de X, qui est un ouvert particulier isomorphe à un espace affine (*cf.* la section 3).

Dans toute la suite $\mathbf{k}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et G est un groupe linéaire algébrique, semi-simple et simplement connexe sur $\mathbf{k}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On choisit un sous-groupe de Borel B de G et $T \subseteq B$ un tore maximal. Soient B^- le sous-groupe de Borel de G opposé à B relativement à T. On note Φ le système de racines de (G, T), Φ^+ l'ensemble des racines positives, Δ la base de Φ associée à B et W le groupe de Weyl de (G, T). On notera w_0 l'élément de plus grande longueur de W.

1 Induction parabolique

Soit X une $G-$variété. Soit P un sous-groupe parabolique de G. S'il existe un morphisme $G-$équivariant $\pi : X \to G/P$, une $P-$variété Y et une immersion fermée $Y \to X$, $P-$équivariante d'image $\pi^{-1}(P/P)$, on dit que X s'obtient par induction parabolique de Y. On le note :

$$X = G \times^P Y \ .$$

Une $G-$variété magnifique de rang 1 est une $G-$variété projective lisse connexe avec deux $G-$orbites : une $G-$orbite ouverte : X_G^0 et une $G-$orbite fermée $F := X \setminus X_G^0$ de codimension 1.

Par exemple, la variété $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ munie de l'action diagonale du groupe $G = \mathrm{SL}_2$ est une variété magnifique de rang 1 (la diagonale et son complémentaires forment les deux $G-$orbites).

Une liste d'autres exemples est donnée par la table 1 de [10]. On dira que ces variétés magnifiques de la table 1 de [10] et la SL_2-variété $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sont les variétés magnifiques *irréductibles* de rang 1 (*cf.* aussi [1] et [3]).

Toutes les autres variétés magnifiques de rang 1 s'obtiennent à partir des variétés irréductibles par induction parabolique :

Lemme 1.1 ([10, §2] ou [1] ou [3]) *Soit X une $G-$variété magnifique de rang 1. Alors, il existe un sous-groupe parabolique P de G, contenant B^-, tel que :*

$$X = G \times^P \widetilde{X}$$

où $\widetilde{X}$ est une P/P^r-variété magnifique irréductible.

2 Groupe de Picard

On rappelle quelques faits sur le groupe de Picard de X. Soit H un sous-groupe d'isotropie d'un point de l'orbite ouverte de X. Quitte à changer H en un de ses conjugués, on suppose que BH/H est ouvert dans G/H. Soit λ un poids dominant. Soit V_λ le $G-$module simple de plus au poids λ. On suppose que $V_\lambda^{(H)} \neq 0$ *i.e.* il existe $0 \neq v_H \in V_\lambda$ un $H-$vecteur propre. Comme la variété X est magnifique, le morphisme $gH \mapsto [g.v_H] \in \mathbb{P}(V_\lambda)$ se prolonge en un morphisme :

$$i_\lambda : X \to \mathbb{P}(V_\lambda) \ .$$

On pose :

$$\mathscr{L}_\lambda := i_\lambda^*(\mathscr{O}(1))$$

c'est un faisceau inversible et $G-$linéarisé sur X (qui *a priori* dépend non seulement de λ mais aussi du choix d'un $H-$vecteur propre dans V_λ). Soit $l_\lambda \in V_\lambda^*$ un $B-$vecteur propre (de poids $-w_0\lambda$). On notera σ_λ l'image de $l_\lambda \in V_\lambda^* = \Gamma(\mathbb{P}(V_\lambda), \mathscr{O}(1))$ dans $\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$.

Soit maintenant D un diviseur premier et $B-$stable de G/H. Soit $\overline{D}$ son adhérence dans X. Soit $p : G \to G/H$, $g \mapsto gH$. Il existe $f_D \in \mathbf{k}[G]$ tel que $p^{-1}(D) = (f_D)$ comme diviseurs de G. Comme D est $B-$stable, il existe un $G-$module simple V_{λ_D}, de plus haut poids λ_D dominant, $l_D \in V_{\lambda_D}^*$ un $B-$vecteur propre et $v_H \in V_{\lambda_D}$ un $H-$vecteur propre tels que :

$$f_D = l_D \otimes v_H$$

i.e. : $f_D(g) = l_D(gv_H)$ pour tout $g \in G$. Alors, on peut montrer que :

$$\mathscr{L}_{\lambda_D} \simeq \mathscr{O}_X(\overline{D})$$

(en particulier, le faisceau $\mathscr{O}_X(\overline{D})$ est engendré par ses sections globales).

De plus, le groupe de Picard de X, $\mathrm{Pic}(X)$, est un réseau dont les classes des faisceaux $\mathscr{L}_{\lambda_D}$ forment une base.

On note $\mathbf{z}$ l'unique point fixe de B^- dans X et Q son stabilisateur dans G. Alors Q est un sous-groupe parabolique de G contenant B^-. On note $P := w_0 Q w_0$ le sous-groupe parabolique de G opposé à Q. Tout caractère λ de P induit un faisceau inversible (et $G-$linéarisé) sur G/Q : $\mathscr{L}_{G/Q}(\lambda)$ (*cf.* [7, I §5.8]). On prendra pour convention que la fibre au-dessus de Q/Q, $\mathscr{L}_{G/Q}(\lambda)\Big|_{Q/Q}$, est la droite affine où le groupe Q agit via le caractère $\lambda^* := -w_0\lambda$.

Avec cette convention et en identifiant la $G-$orbite fermée F de X avec G/Q, si λ est un poids dominant tel que $V_\lambda^{(H)} \neq 0$, alors $\mathscr{L}_\lambda|_F = \mathscr{L}_{G/Q}(\lambda)$.

Lemme 2.1 *Soit F l'unique $G-$orbite fermée de X. On suppose que X n'est pas une induction parabolique de la variété $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ munie de l'action diagonale de SL_2. Alors le morphisme :*

$$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(F)\,,\ \mathscr{L} \mapsto \mathscr{L}|_F$$

est injectif de plus, un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X est engendré par ses sections globales si et seulement si le faisceau $\mathscr{L}|_F$ est engendré par ses sections globales sur F.

Démonstration : On identifie la $G-$orbite fermée F avec G/Q.

Soient $D_1, ...D_p$ les diviseurs premiers $B-$stables de la $G-$orbite ouverte de X. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les caractères correspondants. Les classes des faisceaux $\mathscr{L}_{\lambda_1}, ..., \mathscr{L}_{\lambda_p}$ forment une base de $\mathrm{Pic}(X)$, et pour tout i, $\mathscr{L}_{\lambda_i}\Big|_{G/Q} = \mathscr{L}_{G/Q}(\lambda_i)$.

Si X est une variété magnifique de rang 1 irréductible, alors $p = 1$ (et le lemme est vrai dans ce cas) ou, d'après le tableau 1 de [10, table 1], $p = 2$ et λ_1, λ_2 sont des poids fondamentaux distincts et le lemme est encore vrai dans ce cas.

Pour le cas général, on a $X = G \times^{Q_1} X_1$ pour un certain sous-groupe parabolique Q_1 de G contenant B^- et X_1 une Q_1/Q_1^r-variété magnifique irréductible de rang 1.

Si on note $\pi : X \to G/Q_1$ et $i : X_1 \to X$, alors on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Pic}(G/Q_1) \stackrel{\pi^*}{\to} \mathrm{Pic}(X) \stackrel{i^*}{\to} \mathrm{Pic}(X_1) \to 0\ .$$

En effet, si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur X tel que $\mathscr{L}|_{X_1} \simeq \mathscr{O}_{X_1}$, alors on peut montrer que le faisceau $\pi_*\mathscr{L}$ est inversible sur G/Q_1 et que $\pi^*\pi_*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$; pour la surjectivité de i^*, on remarque que la $B-$orbite ouverte BQ_1/Q_1 de G/Q_1 est isomorphe à un espace affine, que l'ouvert de X, $\Omega := \pi^{-1}(BQ_1/Q_1)$ est isomorphe à $BQ_1/Q_1 \times X_1$ d'où un morphisme surjectif et un isomorphisme : $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\Omega) \simeq \mathrm{Pic}(X_1)$.

Donc si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur X tel que $\mathscr{L}\Big|_{G/Q} \simeq \mathscr{O}_{G/Q}$, alors la restriction de $\mathscr{L}$ à F_1, l'orbite fermée de X_1 est triviale : $\mathscr{L}|_{F_1} \simeq \mathscr{O}_{F_1}$. Donc $\mathscr{L}|_{X_1} \simeq \mathscr{O}_{X_1}$ d'après le premier cas. Mais alors, $\mathscr{L}$ est de la forme $\pi^*\mathscr{M}$ pour un certain faisceau inversible $\mathscr{M}$ sur G/Q_1. Si on note π_1 la restriction de π à G/Q, $\pi_1^*\mathscr{M} \simeq \mathscr{O}_{G/Q}$.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "\pi"] & G/Q_1 \\ F_1 \arrow[u, hook] \arrow[r] & G/Q \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\pi_1"] & \end{tikzcd}$$

Or, $Q \subseteq Q_1$ et π_1 est aussi la surjection canonique $G/Q \to G/Q_1$. Comme le morphisme :

$$\mathrm{Pic}(G/Q_1) \stackrel{\pi_1^*}{\to} \mathrm{Pic}(G/Q)$$

est injectif, le faisceau inversible $\mathscr{M}$ est trivial et $\mathscr{L} = \pi^*\mathscr{M}$ aussi.

Soit D un diviseur de X tel que le faisceau :

$$\mathscr{O}_X(D)|_F$$

est engendré par ses sections globales. Le diviseur D est équivalent à un diviseur $n_1\overline{D_1} + ... + n_r\overline{D_r}$ pour certains entiers n_i. Pour montrer que $\mathscr{O}_X(D)$ est engendré par ses sections globales, il suffit de montrer que $n_i \geq 0$ pour tout i.

Quitte à renuméroter les D_i, on peut supposer que pour un certain $r \leq p$, $D_1, ..., D_r \subseteq X \setminus \Omega$ et que $D_i \cap \Omega \neq \emptyset$ si $i > r$. Soient $E_1, ..., E_r$ les diviseurs premiers $B-$invariants de G/Q_1 tels que $\pi^{-1}(E_i) = \overline{D_i}$. Soient δ_i, $i > r$ les diviseurs premiers $B \cap Q_1-$invariants de X_1 tels que $\overline{D_i} = \overline{BQ_1/Q_1 \times \delta_i}$.

Avec ces notations, les poids $\lambda_1^*, ..., \lambda_r^*$ sont des poids fondamentaux (deux à deux distincts) qui se prolongent en des caractères de Q_1 et les poids $\lambda_{r+1}^*, ..., \lambda_p^*$ sont des caractères triviaux sur Q_1^r.

Comme $\mathscr{O}_X(D)|_F$ est engendré par ses sections globales, le poids $n_1\lambda_1^* + ... + n_p\lambda_p^*$ est dominant. Donc :

$$\forall\, 1 \leq i \leq r,\ n_i \geq 0\ .$$

Notons F_1 la Q_1-orbite fermée de X_1. Le faisceau

$$\mathscr{O}_X(D)|_{F_1} \simeq \mathscr{O}_{X_1}(\sum_{i>r} n_i\delta_i)|_{F_1}$$

est engendré par ses sections globales donc, d'après le cas irréductible, le faisceau $\mathscr{O}_{X_1}(\sum_{i>r} n_i\delta_i)$ est aussi engendré par ses sections globales d'où :

$$\forall\, i > r,\ n_i \geq 0\ .$$

<u>**Q.e.d.**</u>

Remarque : si $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $F = \Delta_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathbb{P}^1$ *et le morphisme* $\mathrm{Pic}X = \mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Pic}F = \mathbb{Z}$ *ne peut pas être injectif de plus, dans ce cas, le faisceau* $\mathscr{O}(1)\boxtimes\mathscr{O}(-1)$ *n'est pas engendré par ses sections globales alors que sa restriction* $\mathscr{O}(1)\boxtimes\mathscr{O}(-1)\Big|_{\Delta_{\mathbb{P}^1}} \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$ *l'est.*

Excepté ce cas et ses inductions paraboliques, on obtient en particulier que pour tout poids dominant λ*, le faisceau inversible* $\mathscr{L}_\lambda$ *défini précedemment ne dépend que de* λ *car* $\mathscr{L}_\lambda|_F \simeq \mathscr{L}_{G/Q}(\lambda)$*.*

Si X n'est pas une induction parabolique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, on en déduit :

Corollaire 2.1.1 *Si* $\mathscr{L}$ *est un faisceau inversible sur* X *engendré par ses sections globales, alors il existe* λ *un poids dominant tel que*

$$(*)\ \ V_\lambda^{(H)} \neq 0$$

et $\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}_\lambda$*. Si* λ, μ *sont deux poids dominants qui vérifient* $(*)$*, alors* $\lambda + \mu$ *vérifie aussi* $(*)$ *et* $\mathscr{L}_\lambda \otimes \mathscr{L}_\mu \simeq \mathscr{L}_{\lambda+\mu}$*.*

Démonstration : Soient λ, μ des poids dominants qui vérifient $(*)$. Soient $v_H \in V_\lambda$ et $v'_H \in V_\mu$ deux $H-$vecteurs propres. Comme BH/H est un ouvert dense de G/H, le vecteur v_H a une composante non nulle de $T-$poids $w_0\lambda$ et le vecteur v'_H une composante non nulle de $T-$poids $w_0\mu$. Donc le $H-$vecteur propre $v_H \otimes v'_H$ a une composante non nulle de $T-$poids $w_0(\lambda+\mu)$ dans $V_\lambda \otimes V_\mu$. Donc en considérant la projection $G-$équivariante : $V\lambda \otimes V_\mu \to V_{\lambda+\mu}$, on trouve un $H-$vecteur propre dans $V_{\lambda+\mu}$.

Or :

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_\lambda \otimes \mathscr{L}_\mu)\Big|_{G/Q} &\simeq \mathscr{L}_\lambda\Big|_{G/Q} \otimes \mathscr{L}_\mu\Big|_{G/Q}\\ &\simeq \mathscr{L}_{G/Q}(\lambda) \otimes \mathscr{L}_{G/Q}(\mu)\\ &\simeq \mathscr{L}_{G/Q}(\lambda+\mu)\\ &\simeq \mathscr{L}_{\lambda+\mu}\Big|_{G/Q}\ .\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{L}_{\lambda+\mu} \simeq \mathscr{L}_\lambda \otimes \mathscr{L}_\mu$.

Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible engendré par ses sections globales.

Notons $D_1, ..., D_p$ les diviseurs premiers $B-$invariants de G/H. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les poids correspondants (tels que $\mathscr{L}_{\lambda_i} \simeq \mathscr{O}_X(\overline{D_i})$ pour tout i). Les poids λ_i sont dominants.. De plus, il existe des entiers $n_1, ..., n_p$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &\simeq \mathscr{L}_{\lambda_1}^{n_1} \otimes ... \otimes \mathscr{L}_{\lambda_p}^{n_p} \\ &\simeq \mathscr{L}_{n_1\lambda_1 + ... + n_p\lambda_p} \end{aligned}$$

d'après la première partie de cette démonstration. Or, $\mathscr{L}\Big|_{G/Q} \simeq \mathscr{L}_{G/Q}(n_1\lambda_1 + ... + n_p\lambda_p)$ est aussi engendré par ses sections globales donc $n_1\lambda_1 + ... + n_p\lambda_p$ est dominant. **Q.e.d.**

Notations : On notera $\mathrm{pic}^+(X)$ les caractères λ dominants tels que $V_\lambda^{(H)} \neq 0$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{pic}^+(X)$, $\mathscr{L}_\lambda$ un faisceau inversible et $G-$linéarisé sur X correspondant (*i.e.* défini comme au début de la section 2) (si X est une induction parabolique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et seulement dans ces cas, il peut y avoir deux faisceaux $\mathscr{L}_\lambda$ non isomorphes).

3 Grosses cellules

On note P^u le radical unipotent du sous-groupe parabolique P de G et L son sous-groupe de Levi contenant le tore T (on rappelle que, relativement au tore T, P est le sous-groupe parabolique opposé à Q le stabilisateur de $\mathbf{z}$ l'unique point fixe de B^- dans X).

Proposition 3.1 ([4, th. 1.4 et cor. 1.5]) *Il existe un voisinage ouvert affine $P-$stable de $\mathbf{z}$ dans X, noté X_0, une sous-variété fermée A de X_0, $L-$ stable, $L-$isomorphe à une droite affine (qui est une représentation de L) et un isomorphisme de $P-$variétés algébriques :*

$$P^u \times A \to X_0\ ,\ (u, a) \mapsto u.a$$

où P agit sur le membre de gauche par :

$$(xl).(u, a) := (xlul^{-1}, l.a)$$

pour tous $x, u \in P^u$, $l \in L$, $a \in A$.

L'ouvert de X_0 est la grosse cellule de X (on peut l'obtenir comme la cellule ouverte d'une décomposition cellulaire de Bialynicki-Birula de X associée à un sous-groupe à un paramètre dominant générique de T).

Remarque : Comme X n'a qu'une seule orbite fermée : $F = G.\mathbf{z}$, et comme $X \setminus \bigcup_{g\in G} gX_0$ est un fermé de X ne contenant pas $\mathbf{z}$, on a forcément $\bigcup_{g\in G} gX_0 = X$.

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette section 3, on suppose que X n'est pas une induction parabolique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Soient λ un poids dominant tel que $V_\lambda^{(H)} \neq 0$, $\mathscr{L}_\lambda$ le faisceau inversible sur X correspondant et $\sigma_\lambda \in \Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$ sa section de plus haut poids (définie à multiplication par un scalaire près). Alors on a :

$$\Gamma(X_0, \mathscr{L}_\lambda) = \mathbf{k}[X_0]\sigma_\lambda \ .$$

De plus, comme d'après la remarque ci-dessus, X est l'unique ouvert $G-$stable de X contenant X_0, l'espace des sections globales $\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$ est le plus grand sous-$G-$module rationnel du $\mathfrak{g}-$module $\Gamma(X_0, \mathscr{L}_\lambda)$.

On a : $\mathbf{k}[X_0] = \mathbf{k}[P^u] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[A]$. Soit y un générateur de l'algèbre $\mathbf{k}[A]$ qui est un $L-$vecteur propre. Le poids de y est $-\gamma$ où γ est la *racine sphérique* de X et on a :

$$\mathbf{k}[X_0] = \oplus_{m \geq 0} \mathbf{k}[P^u] y^m$$

et les fonctions y^m sont, à multiplication par une constante non nulle près, les $B-$vecteurs propres dans le $B-$module $\mathbf{k}[X_0]$.

Le lemme suivant est une adaptation d'un résultat plus général sur les variétés sphériques quelconques, *cf.* [2, pro. du §3.3]. On en donne néanmoins une démonstration *ad hoc*. On suppose que X n'est pas une induction parabolique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On rappelle que $\lambda^* = -w_0\lambda$.

Lemme 3.2 *Soit λ dominant tel que $V_\lambda^{(H)} \neq 0$. Si $m \geq 0$ est un entier tel que le poids $\lambda^* - m\gamma$ est dominant, alors le $\mathfrak{g}-$sous-module de $\Gamma(X_0, \mathscr{L}_\lambda)$ engendré par $y^m\sigma_\lambda$, que nous noterons*

$$U(\mathfrak{g}) y^m \sigma_\lambda \ ,$$

est un sous-$G-$module irréductible de l'espace des sections globales $\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$ et on a la décomposition suivante en somme directe de $G-$modules irréductibles :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{m \geq 0 \\ \lambda^* - m\gamma \text{ dominant}}} U(\mathfrak{g}) y^m \sigma_\lambda \ .$$

Démonstration : Le $G-$module $\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$ est engendré par ses $B-$vecteurs propres. Or les $B-$vecteurs propres de l'espace $\Gamma(X_0, \mathscr{L}_\lambda)$ sont de la forme $y^m\sigma_\lambda$ (à un scalaire près). Or dans un $G-$module les $B-$vecteurs propres sont de poids dominants donc :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda) \subseteq \bigoplus_{\substack{m \geq 0 \\ \lambda^* - m\gamma \text{ dominant}}} U(\mathfrak{g}) y^m \sigma_\lambda \ .$$

Pour l'autre inclusion, on remarque que le faisceau d'idéaux $\mathscr{I}_F$ qui définit l'orbite fermée est un faisceau inversible $G-$linéarisé et que le tore T agit sur la fibre $\mathscr{I}_F|_{\mathbf{z}}$ via le caractère $-\gamma$. On en déduit donc que pour tout

$m \geq 0$ tel que $\lambda^* - m\gamma$ est dominant, le faisceau $\mathscr{L}_\lambda \otimes \mathscr{I}_F^m$ est engendré par ses sections globales (*cf.* le lemme 2.1) et que :

$$\mathscr{L}_\lambda \otimes \mathscr{I}_F^m \simeq \mathscr{L}_{\lambda - m\gamma^*} \ .$$

D'où un morphisme injectif de faisceaux $G-$linéarisés :

$$\mathscr{L}_{\lambda - m\gamma^*} \to \mathscr{L}_\lambda \ .$$

Mais alors, le $G-$module $\Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda - m\gamma^*})$ a une image non nulle dans $\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$. Or, l'image de $\sigma_{\lambda - m\gamma^*}$ est $y^m \sigma_\lambda$ (à multiplication par un scalaire non nul près) donc $y^m \sigma_\lambda \in \Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$. **Q.e.d.**

4 Surjectivité de la multiplication

Théorème 4.1 *Soient $\mathscr{L}, \mathscr{L}'$ deux faisceaux inversibles engendrés par leurs sections globales sur une $G-$variété magnifique de rang* 1*. Alors le morphisme :*

$$\Gamma(X, \mathscr{L}) \otimes \Gamma(X, \mathscr{L}') \to \Gamma(X, \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')$$

est surjectif.

Démonstration :

On notera γ la racine sphérique de X.

Supposons pour commencer que X n'est pas une induction parabolique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Soient λ, μ des poids dominants tels que :

$$V_\lambda^{(H)} \neq 0\,,\ V_\mu^{(H)} \neq 0,\ \mathscr{L} \simeq \mathscr{L}_\lambda \text{ et } \mathscr{L}' \simeq \mathscr{L}_\mu \ .$$

On a alors $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}' \simeq \mathscr{L}_{\lambda+\mu}$. Notons $R_{\lambda,\mu}$ ou R s'il n'y a pas d'ambiguïté le morphisme :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda) \otimes \Gamma(X, \mathscr{L}_\mu) \to \Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda+\mu}) \ .$$

Cas où X est une variété magnifique irréductible

Dans ce cas, d'après [1], la variété X est soit isomorphe à une variété de drapeaux (un espace projectif $\mathbb{P}^n$, une quadrique $Q(n)$ d'équation $x_0^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$, une variété grassmannienne $\mathrm{Gr}(2n, 2)$ (variété des 2$-$plans dans $\mathbf{k}^{2n}$), un produit d'espace projectis $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, ou une variété homogène pour le groupe adjoint de type E_6) soit isomorphe à une des variétés numérotées $9B$, $9C$, 15 dans le tableau 1 de [10, tab.1].

— Lorsque X est une variété de drapeaux, le morphisme :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}) \otimes \Gamma(X, \mathscr{L}') \to \Gamma(X, \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')$$

est surjectif car c'est un morphisme non nul et l'espace $\Gamma(X, \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')$ est une représentation irréductible de l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de X (théorème de Borel-Weil).

— Si X est la variété numéro $9B$ (*resp.* $9C$) dans le tableau 1 de [10, tab.1], alors il existe $n \geq 2$ tel que $G = \mathrm{Spin}_{2n+1}$ (*resp.* $G = \mathrm{Sp}_{2n}$). Notons $\alpha_1, ..., \alpha_n$ les racines simples et $\omega_1, ..., \omega_n$ les poids fondamentaux correspondants. Il existe $p, q \geq 0$ tels que $\lambda = p\omega_1, \mu = q\omega_1$, (*resp.* $\lambda = p\omega_2, \mu = q\omega_2$) et on a : $\gamma = \omega_1$ (*resp.* $\gamma = \omega_2$). Remarquons que dans les deux cas, on a $\lambda^* = \lambda$ et $\mu^* = \mu$.

Soit $m \geq 0$ tel que $\lambda + \mu - m\gamma$ est dominant. Cette condition est équivalente à :

$$0 \leq m \leq p + q \ .$$

On pose $m_1 := \max\{m - q, 0\}$ et $m_2 := m - m_1$. On a alors : $0 \leq m_1 \leq p$, $0 \leq m_2 \leq q$ et $m = m_1 + m_2$ *c-à-d* : $\lambda - m_1\gamma$, $\mu - m_2\gamma$ dominants. Donc d'après le lemme 3.2 :

$$y^{m_1}\sigma_\lambda \in \Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda) \text{ et } y^{m_2}\sigma_\mu \in \Gamma(X, \mathscr{L}_\mu) \ .$$

Or, $R(y^{m_1}\sigma_\lambda \otimes y^{m_2}\sigma_\mu) = y^m\sigma_{\lambda+\mu}$.

Donc l'image de R est un sous $G-$module de $\Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda+\mu})$ qui contient tous les $y^m\sigma_{\lambda+\mu}$ tels que $m \geq 0$ et $\lambda + \mu - m\gamma$ est dominant. On en déduit donc que R est surjectif.

— Si X est la variété numéro 15 dans le tableau 1 de [10, tab.1], alors G est le groupe semi-simple et simplement connexe de type G_2. On prend les notations standards : α_1, α_2 pour les racines simples, ω_1, ω_2 pour les poids fondamentaux correspondants. On a $\gamma = \omega_2 - \omega_1$ et il existe des entiers $p, q, p', q' \geq 0$ tels que $\lambda = p\omega_1 + q\omega_2, \mu = p'\omega_1 + q'\omega_2$. On a : $\lambda^* = \lambda$, $\mu^* = \mu$.

Soit $m \geq 0$ un entier tel que $\lambda + \mu - m\gamma$ est dominant.

Comme $\lambda+\mu-m\gamma = (p+p'+m)\omega_1+(q+q'-m)\omega_2$, on a : $0 \leq m \leq q+q'$.

On pose : $m_1 := \max\{m - q', 0\}$ et $m_2 := m - m_1$. On a $0 \leq m_1 \leq q$, $0 \leq m_2 \leq q'$ et $m = m_1 + m_2$. Donc : $\lambda - m_1\gamma$ et $\mu - m_2\gamma$ sont dominants,

$$y^{m_1}\sigma_\lambda \text{ et } y^{m_2}\sigma_\mu \in \Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda) \ .$$

Or : $R(y^{m_1}\sigma_\lambda \otimes y^{m_2}\sigma_\mu) = y^{m_1+m_2}\sigma_{\lambda+\mu}$.

On en déduit donc que R est encore surjectif dans ce cas.

Cas général

Comme on l'a rappelé au début, il existe un sous-groupe parabolique Q contenant B^- tel que $X = G \times^Q X_1$ pour une certaine Q/Q^r-variété magnifique irréductible. Soit $p : X \to G/Q$ la projection associée.

Notons L le sous-groupe de Levi de G contenant T tel que $Q = Q^uL$. On notera Δ_1 la base du système de racines associé à (L, T) contenue dans Δ.

Soit $B \cap Q/Q^r \subseteq P_1 \subseteq Q/Q^r$ le sous-groupe parabolique associé à la variété magnifique X_1. La grosse cellule $(X_1)_0$ de X_1 vérifie :

$$(X_1)_0 \simeq P_1^u \times A_1$$

pour une certaine sous-variété fermée P_1/P_1^u-stable A_1 de X_1. Si on note Q^+ le sous-groupe parabolique de G opposé à Q (relativement à T), alors la grosses cellule X_0 de X est isomorphe à

$$(Q^+)^u \times (X_1)_0 \simeq (Q^+)^u \times P_1^u \times A_1 \ .$$

Soit $y \in \mathbf{k}[X_0]$ un P_1/P_1^u-vecteur propre tel que $\mathbf{k}[A_1] = \mathbf{k}[y]$. Alors y est de poids γ, la racine sphérique de X. En particulier, γ est un caractère de T/Q^r et donc comme $Q^r = \left(\bigcap_{\delta \in \Delta_1} \ker \delta\right)^\circ$, $\gamma \in \mathbb{Q}\Delta_1$.

On a une décomposition des poids λ^* et μ^* :

$$\lambda^* = \underbrace{\sum_{\alpha \in \Delta_1} \lambda_\alpha \omega_\alpha}_{=:\lambda_1^*} + \underbrace{\sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_1} \lambda_\alpha \omega_\alpha}_{=:\lambda_2^*}$$

$$\mu^* = \underbrace{\sum_{\alpha \in \Delta_1} \mu_\alpha \omega_\alpha}_{=:\mu_1^*} + \underbrace{\sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_1} \mu_\alpha \omega_\alpha}_{=:\mu_2^*}$$

pour certains poids dominants $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$.

Comme $\langle \lambda_2^*, \alpha^\vee \rangle = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_1$, le caractère λ_2^* se prolonge en un caractère de Q. Donc $\lambda_2 \in \mathrm{pic}^+(X)$ et $\mathscr{L}_{\lambda_2} \simeq p^* \mathscr{L}_{G/Q}(\lambda_2)$. On en déduit aussi que $\lambda_1 \in \mathrm{pic}^+(X)$ avec $\mathscr{L}_{\lambda_1} \simeq \mathscr{L}_\lambda \otimes \mathscr{L}_{\lambda_2}^{-1}$.

De même, μ_2^* se prolonge en un caractère de Q et $\mu_1 \in \mathrm{pic}^+(X)$.

On pose $L' := (L, L)$ et on choisit un tore maximal T' de L' contenu dans T.

Si ν est un caractère de T, on notera ν' sa restriction à T'.

Si $\lambda_2 = \mu_2 = 0$, alors, le morphisme de restriction :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda_1}) \to \Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\lambda_1}|_{X_1})$$

est surjectif.

En effet, si $\sigma_{\lambda_1} \in \Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda_1})$ est un vecteur propre de plus haut poids λ_1 et si on pose :$\sigma'_{\lambda_1} := \sigma_{\lambda_1}|_{X_1}$ et $y' := y\Big|_{(X_1)_0}$, alors daprès le lemme 3.2, on a :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda_1}) = \bigoplus_{\substack{m \geq 0 \\ \lambda_1^* - m\gamma \text{ dominant}}} U(\mathfrak{g}) y^m \sigma_{\lambda_1}$$

$$\Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\lambda_1'}) = \bigoplus_{\substack{m \geq 0 \\ (\lambda_1^*)' - m\gamma' \text{ dominant}}} U(\mathfrak{l}') y'^m \sigma'_{\lambda_1}$$

où $\mathfrak{l}'$ est l'algèbre de Lie de L'.

Or, comme $\gamma \in \mathbb{Q}\Delta_1$ et comme $\lambda_1^* \in \langle \omega_\delta : \delta \in \Delta_1 \rangle$, $\lambda_1^* - m\gamma$ est dominant si et seulement si $(\lambda_1^*)' - m\gamma'$ est dominant. D'où la surjectivité.

De même, le morphisme de restriction :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}_{\mu_1}) \to \Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\mu_1}|_{X_1})$$

est surjectif.

Or, d'après le cas particulier des variétés magnifiques irréductibles, le morphisme :

$$\Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\lambda_1}) \otimes \Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\mu_1}) \to \Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\lambda_1 + \mu_1})$$

est surjectif.

Pour montrer la surjectivité de R, il suffit de montrer que si $m \geq 0$ est tel que $\lambda_1^* + \mu_1^* - m\gamma$ est dominant, alors :

$$y^m \sigma_{\lambda_1 + \mu_1} \in \mathrm{Im}\, R \ .$$

Considérons donc $m \geq 0$ tel que $\lambda_1^* + \mu_1^* - m\gamma$ est dominant. On a alors $\lambda_1' + \mu_1' - m\gamma'$ dominant.

Puisque le morphisme R commute avec la restriction à X_1 :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda_1}) \otimes \Gamma(X, \mathscr{L}_{\mu_1}) \arrow[r, "R"] \arrow[d, two heads] & \Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda_1 + \mu_1}) \arrow[d, two heads] \\
\Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\lambda_1}) \otimes \Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\mu_1}) \arrow[r, two heads] & \Gamma(X_1, \mathscr{L}_{\lambda_1 + \mu_1})
\end{tikzcd}$$

il existe $\sigma \in \Gamma(X, \mathscr{L}_{\lambda_1}) \otimes \Gamma(X, \mathscr{L}_{\mu_1})$ tel que :

$$R(\sigma)|_{X_1} = y^m \sigma_{\lambda_1 + \mu_1}|_{X_1} \ .$$

Dans le diagramme ci-dessus, les morphismes sont $\mathrm{diag}(T)-$équivariants (car X_1 est une sous-variété $Q-$stable de X). On peut donc choisir σ comme un $\mathrm{diag}(T)-$vecteur propre de poids $\lambda_1^* + \mu_1^* - m\gamma$.

Nous allons voir qu'alors $R(\sigma) = y^m \sigma_{\lambda_1 + \mu_1}$.

En effet, $R(\sigma) = h\sigma_{\lambda_1 + \mu_1}$ pour un certain $T-$vecteur propre $h \in \mathscr{O}(X_0)$ tel que $h\Big|_{(X_1)_0} = y^m\Big|_{(X_1)_0}$.

En particulier, $h = y^m + h'$ où h' est un $T-$vecteur propre de $\mathscr{O}(X_0)$ tel que $h'\Big|_{(X_1)_0} = 0$.

Or on a des isomorphismes $T-$équivariants de variétés :

$$X_0 \simeq (Q^+)^u \times P_1^u \times A_1 \text{ et } (X_1)_0 \simeq \{1\} \times P_1^u \times A_1$$

donc si on note $u_1, ..., u_p$ un système de coordonnées $T-$équivariantes de $(Q^+)^u$, $v_1, ..., v_q$ un système de coordonnées $T-$équivariantes de P_1^u, alors h' est une combinaison $\mathbf{k}-$linéaire de monômes :

$$u_1^{m_1}...u_p^{m_p} v_1^{n_1}...v_q^{n_q} y^k$$

où $m_1, ..., m_p, n_1, ..., n_q, k$ sont des entiers ≥ 0 et au moins un des m_i est non nul (car $h'\Big|_{(X_1)_0} = 0$).

Mais si $-\alpha_1, ..., -\alpha_p$, $-\beta_1, ..., -\beta_q$ sont les $T-$poids des coordonnées u_i, v_j, alors :

$$\{\alpha_1, ..., \alpha_p\} = \Phi^+ \setminus \langle \Delta_1 \rangle \text{ et } \{\beta_1, ..., \beta_q\} \subseteq \langle \Delta_1 \rangle \ .$$

Comme h' est de $T-$poids $-m\gamma$, les monômes qui apparaissent dans la décomposition de h' doivent vérifier :

$$-m_1\alpha_1 - ... - m_p\alpha_p - n_1\beta_1 - ... - n_q\beta_q - k\gamma = -m\gamma$$

$$\Leftrightarrow (m-k)\gamma - n_1\beta_1 - ... - n_q\beta_q = m_1\alpha_1 + ... + m_p\alpha_p$$

ce qui est impossible : le membre de gauche est dans $\mathbb{Q}\Delta_1$ alors que dans le membre de droite apparaît au moins un coefficient non nul suivant une racine simple $\delta \in \Delta \setminus \Delta_1$ car tous les α_i sont dans $\Phi^+ \setminus \Delta_1$ et $m_i > 0$ pour au moins un indice i.

On en déduit que $h' = 0$.

Pour le cas général si λ_2 ou μ_2 n'est pas forcément nul, on utilise le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathscr{L}_{\lambda_1}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}_{\lambda_2}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}_{\mu_1}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}_{\mu_2}) \arrow[r, "R_{\lambda_1,\mu_1} \otimes R_{\lambda_2,\mu_2}"] \arrow[d, "R_{\lambda_1,\lambda_2} \otimes R_{\mu_1,\mu_2}"'] & \Gamma(\mathscr{L}_{\lambda_1+\mu_1}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}_{\lambda_2+\mu_2}) \arrow[d, "R_{\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2}"] \\
\Gamma(\mathscr{L}_{\lambda_1+\lambda_2}) \otimes \Gamma(\mathscr{L}_{\mu_1+\mu_2}) \arrow[r, "R_{\lambda,\mu}"] & \Gamma(\mathscr{L}_{\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2})
\end{tikzcd} .$$

Pour montrer que $R_{\lambda,\mu}$ est surjectif, il suffit donc de montrer que

$$R_{\lambda_1,\lambda_2}, R_{\mu_1,\mu_2}, R_{\lambda_2,\mu_2}, R_{\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2}$$

sont surjectifs (car on sait déjà que R_{λ_1,μ_1} est surjectif).

Or, pour tout $\lambda \in \mathrm{pic}^+(X)$ et tout caractère dominant μ_2 de Q, le morphisme R_{λ,μ_2} est surjectif. En effet, si $m \geq 0$ et si $\lambda^* + \mu_2 - m\gamma$ est dominant, alors $\lambda^* - m\gamma$ est aussi dominant puisque l'on a :

$$\delta \in \Delta_1 \Rightarrow \langle \mu_2, \delta^\vee \rangle = 0 \text{ et } \delta \in \Delta \setminus \Delta_1 \Rightarrow \langle \gamma, \delta^\vee \rangle \leq 0 \ .$$

Donc dans ce cas, $y^m\sigma_\lambda \in \Gamma(X, \mathscr{L}_\lambda)$ et $y^m\sigma_{\lambda+\mu_2} = R_{\lambda,\mu_2}(y^m\sigma_\lambda \otimes \sigma_{\mu_2})$.

On termine avec le cas particulier où X est une induction parabolique de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Il existe Q un sous-groupe parabolique de G contenant B^- tel que $Q/Q^r \simeq \mathrm{PGL}_2$ ou SL_2 et $\pi : X \to G/Q$ un morphisme $G-$équivariant tel que :

$$\pi^{-1}(Q/Q) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

(isomorphisme PGL_2-équivariant (pour l'action diagonale de PGL_2 sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$)). On notera $X_1 := \pi^{-1}(Q/Q)$.

Notons f et m les morphismes suivants :

$$\begin{array}{ccc} G \times X_1 & \xrightarrow{f} & G/Q \times X_1 \\ \downarrow{\scriptstyle m} & & \\ X & & \end{array}$$

$f : (g,x) \mapsto (gQ, x)$, $m : (g,x) \mapsto g.x$. Pour tout λ caractère de Q et tous k_1, k_2 entiers, on note $\mathscr{L}_{\lambda,k_1,k_2}$ le faisceau $m_* f^* \Big(\mathscr{L}_{G/Q}(\lambda) \boxtimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(k_1,k_2)\Big)$ sur X.

Les faisceaux $\mathscr{L}_{\lambda,k_1,k_2}$ sont inversibles (il suffit de le vérifier au-dessus de l'ouvert $\pi^{-1}(BQ/Q)$ de X qui est isomorphe à $BQ/Q \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$) et tous les faisceaux inversibles sur X sont de cette forme à isomorphisme près à cause de la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Pic}(G/Q) \stackrel{\pi^*}{\to} \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_1) \to 0$$

(*cf.* la démonstration du lemme 2.1).

Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ des faisceaux inversibles sur X engendrés par leurs sections globales. Soient λ, μ des caractères de Q, k_1, k_2, l_1, l_2 des entiers tels que :

$$\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}_{\lambda,k_1,k_2} \text{ et } \mathscr{L}' \simeq \mathscr{L}_{\mu,l_1,l_2} \ .$$

On a alors :

$$\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}' \simeq \mathscr{L}_{\lambda+\mu,k_1+k_2,l_1+l_2} \ .$$

Puisque $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ sont engendrés par leurs sections globales, les poids λ, μ sont des caractères de T dominants (relativement à B) et on a : $k_1, k_2, l_1, l_2 \geq 0$.

Si $s \geq 0$ est entier, on note $\mathbf{k}[X,Y]_s$ est l'espace des polynômes homogènes de degré s en les deux variables X, Y. On a :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}) \simeq V_{\lambda^*} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[X,Y]_{k_1} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[X,Y]_{k_2}$$

$$\Gamma(X, \mathscr{L}) \simeq V_{\mu^*} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[X,Y]_{l_1} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[X,Y]_{l_2}$$

$$\Gamma(X, \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}') \simeq V_{\lambda^*+\mu^*} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[X,Y]_{k_1+l_1} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[X,Y]_{k_2+l_2} \ .$$

La surjectivité du morphisme :

$$\Gamma(X, \mathscr{L}) \otimes \Gamma(X, \mathscr{L}') \to \Gamma(X, \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')$$

résulte alors directement de la surjectivité des morphismes :

$$V_{\lambda^*} \otimes V_{\mu^*} \to V_{\lambda^* + \mu^*}$$

et

$$\mathbf{k}[X, Y]_{k_i} \otimes \mathbf{k}[X, Y]_{l_i} \to \mathbf{k}[X, Y]_{k_i + l_i} \ .$$

Q.e.d.

Références

[1] D. Akhiezer : Equivariant completions of homogeneous algebraic varieties by homogeneous divisors. *Ann. Global Anal. Geom.*, 1(1):49–78, 1983.

[2] M. Brion : Groupe de picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques. *Duke Math. J.*, 58(2):397–424, 1989.

[3] M. Brion : On spherical varieties of rank one. *in Group actions and invariant theory (Montreal, PQ, 1988)*, pages 31–41, 1989.

[4] M. Brion, D. Luna et Th. Vust : Espaces homogènes sphériques. *Invent. Math.*, 84(3):617–632, 1986.

[5] R. Chirivi et A. Maffei : Projective normality of complete symmetric varieties. *Duke Math. J.*, 122(1):93–123, 2004.

[6] R. Hartshorne : *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[7] J.C. Jantzen : *Representations of algebraic groups*. Pure and Applied Mathematics, 131. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1987.

[8] S. S. Kannan : Projective normality of the wonderful compactification of semisimple adjoint groups. *Math. Z.*, 239(4):673–682, 2002.

[9] D. Luna : Toute variété magnifique est sphérique. *Transform. Groups*, 3(3):249–258, 1996.

[10] B. Wasserman : Wonderful varieties of rank two. *Transform. Groups*, 1:375–403, 1996.